力学ICD演習解答例

演習１

１. 質量 1 kgの物体の重さは地球上では何Nか。（地球上での重力加速度を g = 9.8 m/s²とする。）また、月面上ではどうなるか。（月面上で重力は1/6になるとする）

（解答例）

重さは重力であるから、F=mgより、地球上では9.8 N, 月面上では 1.6 [N]

２. 二つの質点がある。作用・反作用の法則で図のように大きさが等しく向きが逆の力（ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ）が働いている。このとき、<u>二つの質点の運動量の和は常に一定（全運動量の保存）</u>であることを示しなさい。（それぞれの質量、速度、運動量を $m_1, m_2, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$ とする。）

（解答例）

二つの質点の運動方程式は、それぞれ、

$$m_1 \frac{d\,\mathbf{v}_1(t)}{dt} = \mathbf{F}_{12}\text{、}\quad m_2 \frac{d\,\mathbf{v}_2(t)}{dt} = \mathbf{F}_{21}$$

となる。両式を足すと、

$$m_1 \frac{d\,\mathbf{v}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\,\mathbf{v}_2(t)}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$

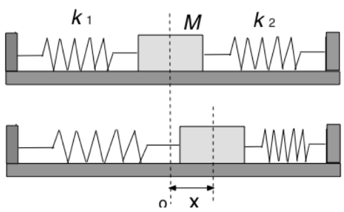
最後ところは、作用・反作用の法則 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ を使った。
今、質量が時間変化しないとすると、

$$\frac{d(m_1 \mathbf{v}_1(t))}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2(t))}{dt} = \frac{d\,\mathbf{p}_1(t)}{dt} + \frac{d\,\mathbf{p}_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)) = 0$$

よって、全運動量 $\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)$ は定数となるので、常に保存する（時間変化しないで一定）。
（参考：<u>**「保存する」ことを示す場合、上のように、その量の時間微分がゼロとなることを示せば良い。**</u>）

3. 図のように質量Mの物体の両側にばね定数k_1とk_2のばねがつけられている。ばねの質量や物体と床の摩擦などは無視できるものとする。

（１）この系の運動方程式を書け。
（２）振動の周期を求めよ。



(解答例)

下側の図より、Mが正の方向へxだけ変位した時、左右のばねから受ける力はそれぞれ $F_1 = -k_1 x,\ F_2 = -k_2 x$ となる。したがって、Mが受ける力は $F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x$ となる。

よって、(1) 運動方程式は $M\frac{d^2 x(t)}{dt} = -(k_1 + k_2)x$ となる。これは、Mが、**ばね定数 $k = k_1 + k_2$ の単一のばねにつながっている場合と同等**である。よって、一般解は $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ となる。

ここで、$\omega = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{M}}$

(2) 周期は$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}}$ となる。

4. 地表近くでの一様な重力のもとでの落下運動は

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \qquad (1\text{-}16)$$

で表される。ここで、g は重力加速度である。係数C_1, C_2 の値によって、いろいろな初期条件での落下運動が記述される。逆に、この式の両辺をtで微分することにより、これらの係数を消去し、この運動に対する微分方程式を導きなさい。

（解答例）

微分すると、$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = gt + C_1$. さらに微分すると、$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g$ となり、積分定数C_1, C_2 が消去できた。

両辺に質量をかければ、$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg$ 　となるから、これは地表近くでの一様な重力のもとでの落下運動を表すNewtonの運動方程式になっている。**初期条件の変化による様々な運動は係数C_1, C_2 の値によって決まるが、運動方程式（微分方程式）は、個々のそのような運動ではなく、これらの運動に共通な性質を表現したものと解釈できる**。

5. 今、一定の速度Vで動いている台車の上に乗っている人が、ボールを自分の真上に初速度v_0で投げ上げた。空気の抵抗などは無視できるとして、以下の問いに答えよ。

(1) 台車に乗っている人からそのボールの運動はどう見えるか。

(2) 台車の外で静止している人がそのボールを観察したらどう見えるか。

(3) 台車に乗っている人と、外で静止している人とで、ボールの見え方が違うが、両者でニュートンの第２法則が成り立っていると言えるか？

（解答例）

(1) 自分の真上（z軸とする）に初速度v_0で上昇し、そのままz軸上で折り返して落ちてくる落下運動。

(2) ボールは台車の進行方向（x軸とする）に速度V、z軸方向に速度v_0の成分を持つので、ボールはそれらをベクトル的に合成した方向に投げ上げたことになるので放物線を描く。その間に台車は速度Vでx軸方向に進むので、結局、ボールは手元に到達する。

(3)確かに、台車に乗っている人と、台車の外から観察している人とでは異なる運動に見えるが、両者ともNewtonの運動方程式の解になっているので、両者ともニュートンの第２法則が成り立つと言える。

第２法則が成り立つと言うことは、その運動がNewtonの運動方程式の解になっていることを意味する。なので、**運動自体は慣性系ごとに異なって見えても良い。**結局、両者とも慣性系なのでNewtonの運動方程式が成立していることがわかる.

6. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) = \mathbf{A}(t)\frac{d\,\mathbf{B}(t)}{dt} + \frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t)$ を証明せよ。

（解答例）成分で左辺を書くと、$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)) = \frac{d}{dt}(A_x(t)B_x(t) + A_y(t)B_y(t) + A_z(t)B_z(t))$. これを展開すると、

$$A_x(t)\frac{dB_x(t)}{dt} + \frac{dA_x(t)}{dt}B_x(t) + A_y(t)\frac{dB_y(t)}{dt} + \frac{dA_y(t)}{dt}B_y(t) + A_z(t)\frac{dB_z(t)}{dt} + \frac{dA_z(t)}{dt}B_z(t)$$

$$= \left(A_x(t)\frac{dB_x(t)}{dt} + A_y(t)\frac{dB_y(t)}{dt} + A_z(t)\frac{dB_z(t)}{dt}\right) + \left(\frac{dA_x(t)}{dt}B_x(t) + \frac{dA_y(t)}{dt}B_y(t) + \frac{dA_z(t)}{dt}B_z(t)\right) = \mathbf{A}(t)\frac{d\,\mathbf{B}(t)}{dt} + \frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t)$$

ただし、$\frac{dA_x(t)}{dt} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_x$, $\frac{dA_y(t)}{dt} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_y$, $\frac{dA_z(t)}{dt} = \left(\frac{d\,\mathbf{A}(t)}{dt}\right)_z$ 、であることに注意。

演習２

ばね定数k の調和振動子がある。１次元的に振動する場合、その力の場 がどうなるかスケッチしなさい。また、等方的に3次元で振動（どの方向に引っ張っても中心方向に復元力が働く）する場合はどうなるか。

（解答例）１次元の場合、x軸方向に振動しているとして、x軸正の方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$ と書くと、復元力は、$\mathbf{F} = (-kx)\mathbf{e}_x$ と書ける。あるいは、これを $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x}$ と書いても良い。

これを図示すると下図のようになる。３次元の場合、座標の原点からの位置ベクトルを $\mathbf{r}$ として、復元力は、$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$ と書ける。これを図示すると、右図のようになる。ただし、k=1として描いた。